

I. Matematyka ogólna

Definicje podstawowych funkcji zmiennej rzeczywistej (trygonometryczne, potęgowe, wykładnicze, hiperboliczne, pierwiastki), wykresy funkcji. Funkcje odwrotne. Funkcje cyklometryczne. Granice funkcji. Ciągłość: własność przyjmowania wartości pośrednich, osiąganie kresów na przedziale domkniętych. Szeregi geometryczny i arytmetyczny, szereg Taylora. Funkcja pierwotna. Wektory na płaszczyźnie i w przestrzeni, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy.

II. Algebra z geometrią.

Podstawowe struktury algebraiczne. Liczby rzeczywiste i zespolone. Układy równań liniowych, macierze, eliminacja Gaussa. Operacje na macierzach. Macierze jako przykład algebry, macierze odwrotne. Grupa permutacji, wyznacznik macierzy. Obliczanie i własności wyznaczników macierzy. Wzory Kramera, rozwinięcie Laplace'a. Minory, rząd macierzy, odwracanie macierzy. Przestrzenie wektorowe - liniowa niezależność wektorów, bazy. Odwzorowania liniowe i ich związek z macierzami. Wartości i wektory własne macierzy. Twierdzenia Hamiltona-Cayleya. Funkcje na macierzach. Zamiana baz, niezmienniki endomorfizmów. Przestrzenie wektorowe z iloczynem skalarnym. Ortogonalizacja Grama-Schmidta. Operatory unitarne i hermitowskie. Formy kwadratowe i klasyfikacja kwadryk.

III. Rachunek różniczkowy i całkowy

Twierdzenie o dwumianie i trójkąt Pascala. Iloczyn kartezjański zbiorów, funkcje jako relacje, relacje równoważności. Ciągi i ich granice. Zupełność zbioru liczb rzeczywistych
Różniczkowanie: Pochodna: notacja i definicja. Interpretacje geometryczna i fizyczna. Pochodne podstawowych funkcji. Pochodne wyższego rzędu i wzór Leibniza. Pochodna funkcji odwrotnej. Wzór Taylora. Maksima i minima. Badanie funkcji: monotoniczność, wypukłość i punkty przegięcia, lokalne ekstrema, znajdowanie wartości największych i najmniejszych funkcji różniczkowalnej na przedziale.

Całkowanie: Antyróżniczkowanie i całka nieoznaczona. Systematyczne metody całkowania. Całki podstawowych funkcji. Całka oznaczona i całki niewłaściwe. Interpretacje geometryczna i fizyczna

Szeregi nieskończone: Szeregi liczbowe, kryteria zbieżności. Szeregi potęgowe, promień zbieżności.

Wielowymiarowy rachunek różniczkowy: Różniczkowanie funkcji dwóch i trzech zmiennych. Pochodne cząstkowe. Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni. Gradient. Pochodna w dowolnym kierunku i wzór Taylora. Maksima i minima oraz inne punkty stacjonarne. Metoda najmniejszych kwadratów. Różniczkowanie niejawne. Maksima i minima z więzami, mnożniki Lagrange'a.

Równania różniczkowe zwyczajne: Równania pierwszego rzędu. Ścisłe rozwiązania pewnych typów równań. Zastosowania fizyczne i geometryczne. Równania wyższych rzędów. Układy równań różniczkowych

Całki wielokrotne: Całki podwójne. Całki iteracyjne. Zamiana zmiennych i jacobian. Całka z funkcji Gaussa. Całki trójwymiarowe. Całki iteracyjne. Zamiana zmiennych. Współrzędne walcowe i kuliste. Zastosowania geometryczne i fizyczne. Całki niewłaściwe i całki z parametrami

IV. Analiza

Lokalna i globalna aproksymacja funkcji. Równomierna zbieżność ciągów funkcji, kryteria Cauchy i Abela.

Funkcje jednej zmiennej zespolonej: Odwzorowania konforemne, funkcje wieloznaczne i powierzchnia Riemanna, punkty rozgałęzienia i cięcia. Różniczkowalność w sensie zespolonym, analityczność. Pochodna funkcji zespolonej i wzory Cauchy-Riemanna, funkcje harmoniczne.

Całki konturowe na płaszczyźnie zespolonej Twierdzenia Cauchy i Morery, wzory Cauchy, lemat Jordana. Szeregi Taylora i Laurenta. Przedłużenie analityczne. Klasyfikacja punktów osobliwych.

Twierdzenie o residuach i jego zastosowania Zastosowanie do obliczania całek z funkcji jednoznacznych i wieloznacznych residuum logarytmiczne i w nieskończoności, dowód podstawowego twierdzenia algebry. Wartość główna całki, związki dyspersyjne i transformata Hilberta. Funkcje Eulera gamma i beta, wzór Stirlinga.

Szeregi Fouriera Szeregi funkcyjne i ich zbieżność: punktowa, jednostajna i w sensie wartości średniej. Szeregi Fouriera Lemat Riemanna, warunki i twierdzenie Dirichleta, twierdzenie Parsewala.

Transformata Fouriera Prosta i odwrotna transformata Fouriera, twierdzenie Parsewala. Własności transformaty Zastosowanie do liniowych równań różniczkowych cząstkowych (np. równania dyfuzji),

Elementy teorii dystrybucji, delta Diraca Dystrybucje jako granice ciągów funkcji, delta Diraca i podstawowe własności laplasjan potencjału kulombowskiego i model ładunku punktowego.

Elementy teorii przestrzeni Hilberta Iloczyn skalarny, odległość i norma. Operatory normalne, hermitowskie, unitarne i rzutowe. Rozkład jedyńki. Twierdzenie spektralne i funkcja od operatora.

Zagadnienie Sturm-Liouville'a Zagadnienie własne dla równań różniczkowych.

Wielomiany ortogonalne jako wynik ortogonalizacji Grama-Schmidta w przestrzeni Hilberta. Definicja wielomianów ortogonalnych poprzez funkcję tworzącą i ich powiązanie z wielomianami otrzymanymi w wyniku ortogonalizacji Grama-Schmidta, Wzory Rodriguesa.